

# Wybrane wzory matematyczne

$$\begin{aligned}
 & A' = (x, -y) \quad \text{tg } \alpha \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \\
 & y = ax + b \quad b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 \\
 & P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n) \\
 & \frac{1}{2} (a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}) \quad y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad \sin \alpha \quad a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \quad A' = (x, -y) \\
 & \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha + \text{tg } \beta \quad a \neq 0 \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad \bar{u} = [u_1, u_2], \bar{v} = [v_1, v_2] \quad \text{tg } \alpha - \text{tg } \beta \\
 & \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \cos \beta \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \alpha \left[^\circ\right] \quad A' = (x, -y) \quad P = (x_0, y_0) \quad y = ax + b \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \beta \left[^\circ\right] \quad P = (x_0, y_0) \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha \\
 & \sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \text{tg } \alpha, \quad k - \text{całkowite} \\
 & \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2} \quad n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!} \quad y \neq 0 \quad \text{tg } \alpha \quad P(B_i) > 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq n \\
 & (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad \overline{AB} \quad \sin \alpha \quad (n-k)! \\
 & y = ax + b \quad \text{tg } \alpha \quad \beta \left[^\circ\right] \\
 & f'(x) = \frac{-a}{x^2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad 2 \quad a + c = b + d \quad \frac{a_{n+1}}{2} \\
 & (a_n) \quad a_1 = a_2 \quad P = (x_0, y_0) \\
 & \log_{10} x \quad \overline{AB} \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad a_{n+1} \\
 & \bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{2}{2} \\
 & (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad n \quad \beta \left[^\circ\right] \quad \frac{\sin \alpha}{\cos \beta} \quad \frac{2}{2} \quad \text{tg } \alpha \\
 & i \neq j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \quad (a_n) \quad \text{tg } \alpha \\
 & \text{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tg } \alpha + \text{tg } \beta}{1 - \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \quad \text{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\text{tg } \alpha - \text{tg } \beta}{1 + \text{tg } \alpha \cdot \text{tg } \beta} \\
 & A' = (x, -y) \quad x > 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad P = (x_0, y_0) \\
 & a_{n+1} \quad f(x) = a(x-x_1)(x-x_2) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & \text{tg } \alpha \quad \frac{a_{n+1}}{2} \quad \text{tg } \alpha \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \log_{10} x \\
 & a + c = b + d \quad \frac{2}{2} \quad \log_{10} x \\
 & |AB| = |DE|, |\angle BAC| = |\angle EDF|, |\angle ABC| = |\angle DEF| \\
 & y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\
 & \frac{Ax + By + C = 0, \quad b \geq 0}{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n} \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Delta \geq 0 \\
 & \Delta > 0 \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n \quad c \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \\
 & P(B_i) > 0 \text{ dla } 1 \leq i \leq n \\
 & \frac{a_{n+1}}{2} \quad (\Delta ABC \sim \Delta DEF) \quad A \\
 & P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)| \\
 & y = ax + b \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad f'(x) = \frac{-a}{x^2} \\
 & a = \frac{f'(x_0)}{2} \quad (a_n) \quad (x_0^{\beta \left[^\circ\right]}) \\
 & \overline{OA'} = s \cdot \overline{OA} \quad \Delta < 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & y = ax + b \quad \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} \\
 & y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \quad \Delta \geq 0 \\
 & \frac{1}{2} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} + 1 \right) \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad a_1 = a_2 \\
 & \frac{1}{2} \left( \frac{a_n}{2} + \frac{a_{n+1}}{2} + 1 \right) \quad \Delta \geq 0 \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & b \geq 0 \quad a + c = b + d \quad y = ax + b \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \\
 & \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n} \quad \frac{3}{3} \\
 & a_1 = a_2 \quad w_1 + w_2 + \dots + w_n \quad a_1 = a_2 \quad 3
 \end{aligned}$$



## Spis treści

|     |   |    |
|-----|---|----|
| 1.  | Wartość bezwzględna liczby .....                  | 1  |
| 2.  | Potęgi i pierwiastki .....                        | 1  |
| 3.  | Logarytmy .....                                   | 2  |
| 4.  | Silnia. Współczynnik dwumianowy .....             | 2  |
| 5.  | Wzór dwumianowy Newtona .....                     | 2  |
| 6.  | Wzory skróconego mnożenia .....                   | 3  |
| 7.  | Ciągi .....                                       | 3  |
| 8.  | Funkcja kwadratowa .....                          | 4  |
| 9.  | Geometria analityczna .....                       | 4  |
| 10. | Planimetria .....                                 | 6  |
| 11. | Stereometria .....                                | 12 |
| 12. | Trygonometria .....                               | 14 |
| 13. | Kombinatoryka .....                               | 16 |
| 14. | Rachunek prawdopodobieństwa .....                 | 17 |
| 15. | Parametry danych statystycznych .....             | 18 |
| 16. | Granica ciągu .....                               | 18 |
| 17. | Pochodna funkcji .....                            | 19 |
| 18. | Tablica wartości funkcji trygonometrycznych ..... | 20 |

Publikacja współfinansowana przez Unię Europejską w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego.  
Publikacja jest dystrybuowana bezpłatnie.

## 1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej  $x$  definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba  $|x|$  jest to odległość na osi liczbowej punktu  $x$  od punktu 0.

Dla dowolnej liczby  $x$  mamy:

$$|x| \geq 0 \quad |x| = 0 \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x = 0 \quad |-x| = |x|$$

Dla dowolnych liczb  $x, y$  mamy:

$$|x + y| \leq |x| + |y| \quad |x - y| \leq |x| + |y| \quad |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

Ponadto, jeśli  $y \neq 0$ , to  $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ .

Dla dowolnych liczb  $a$  oraz  $r \geq 0$  mamy:

$$\begin{aligned} |x - a| \leq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a - r \leq x \leq a + r \\ |x - a| \geq r & \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } x \leq a - r \text{ lub } x \geq a + r \end{aligned}$$

## 2. POTĘGI I PIERWIASTKI

Niech  $n$  będzie liczbą całkowitą dodatnią. Dla dowolnej liczby  $a$  definiujemy jej  $n$ -tą potęgę:

$$a^n = \underbrace{a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ razy}}$$

Pierwiastkiem arytmetycznym  $\sqrt[n]{a}$  stopnia  $n$  z liczby  $a \geq 0$  nazywamy liczbę  $b \geq 0$  taką, że  $b^n = a$ .

W szczególności, dla dowolnej liczby  $a$  zachodzi równość:  $\sqrt{a^2} = |a|$ .

Jeżeli  $a < 0$  oraz liczba  $n$  jest nieparzysta, to  $\sqrt[n]{a}$  oznacza liczbę  $b < 0$  taką, że  $b^n = a$ .

Pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

Niech  $m, n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

$$\begin{aligned} - \text{ dla } a \neq 0: & \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{oraz} \quad a^0 = 1 \\ - \text{ dla } a \geq 0: & \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \\ - \text{ dla } a > 0: & \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \end{aligned}$$

Niech  $r, s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to zachodzą równości:

$$\begin{aligned} a^r \cdot a^s &= a^{r+s} & (a^r)^s &= a^{r \cdot s} & \frac{a^r}{a^s} &= a^{r-s} \\ (a \cdot b)^r &= a^r \cdot b^r & \left(\frac{a}{b}\right)^r &= \frac{a^r}{b^r} \end{aligned}$$

Jeżeli wykładniki  $r, s$  są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb  $a \neq 0$  i  $b \neq 0$ .

### 3. LOGARYTMY

Logarytmem  $\log_a c$  dodatniej liczby  $c$  przy dodatniej i różnej od 1 podstawie  $a$  nazywamy wykładnik  $b$  potęgi, do której należy podnieść  $a$ , aby otrzymać  $c$ :

$$\log_a c = b \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } a^b = c$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a c} = c$$

Dla dowolnych liczb  $x > 0$ ,  $y > 0$  oraz  $r$  zachodzą wzory:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad \log_a x^r = r \cdot \log_a x \quad \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli  $a > 0$ ,  $a \neq 1$ ,  $b > 0$ ,  $b \neq 1$  oraz  $c > 0$ , to

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

Logarytm  $\log_{10} x$  można też zapisać jako  $\log x$  lub  $\lg x$ .

### 4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

Silnią liczby całkowitej dodatniej  $n$  nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do  $n$  włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że  $0! = 1$ .

Dla dowolnej liczby całkowitej  $n \geq 0$  zachodzi związek:

$$(n+1)! = n! \cdot (n+1)$$

Dla liczb całkowitych  $n, k$  spełniających warunki  $0 \leq k \leq n$  definiujemy współczynnik dwumianowy  $\binom{n}{k}$  (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Zachodzą równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{0} = 1$$

$$\binom{n}{n} = 1$$

### 5. WZÓR DWUMIANOWY NEWTONA

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dla dowolnych liczb  $a, b$  mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \dots + \binom{n}{k} a^{n-k} b^k + \dots + \binom{n}{n-1} a b^{n-1} + \binom{n}{n} b^n$$

## 6. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb  $a, b$ :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dowolnych liczb  $a, b$  zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 - 1 = (a-1)(a^2 + a + 1)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \dots + a + 1)$$

## 7. CIĄGI

### • Ciąg arytmetyczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu arytmetycznego  $(a_n)$  o pierwszym wyrazie  $a_1$  i różnicy  $r$ :

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu arytmetycznego zachodzi związek:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

### • Ciąg geometryczny

Wzór na  $n$ -ty wyraz ciągu geometrycznego  $(a_n)$  o pierwszym wyrazie  $a_1$  i ilorazie  $q$ :

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

Wzór na sumę  $S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  początkowych  $n$  wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = \begin{cases} a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} & \text{dla } q \neq 1 \\ n \cdot a_1 & \text{dla } q = 1 \end{cases}$$

Między sąsiednimi wyrazami ciągu geometrycznego zachodzi związek:

$$a_n^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

### • Procent składany

Jeżeli kapitał początkowy  $K$  złożymy na  $n$  lat w banku, w którym oprocentowanie lokat wynosi  $p\%$  w skali rocznej i kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy  $K_n$  wyraża się wzorem:

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

## 8. FUNKCJA KWADRATOWA

Postać ogólna funkcji kwadratowej:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ,  $a \neq 0$ ,  $x \in R$ .

Wzór każdej funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci kanonicznej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q, \text{ gdzie } p = -\frac{b}{2a}, q = -\frac{\Delta}{4a}, \Delta = b^2 - 4ac$$

Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie o współrzędnych  $(p, q)$ . Ramiona paraboli skierowane są do góry, gdy  $a > 0$ ; do dołu, gdy  $a < 0$ .

Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$  (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania  $ax^2 + bx + c = 0$ ), zależy od wyróżnika  $\Delta = b^2 - 4ac$ :

- jeżeli  $\Delta < 0$ , to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych),
- jeżeli  $\Delta = 0$ , to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek podwójny, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):  $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$
- jeżeli  $\Delta > 0$ , to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Jeśli  $\Delta \geq 0$ , to wzór funkcji kwadratowej można doprowadzić do postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

### • Wzory Viéte'a

Jeżeli  $\Delta \geq 0$ , to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

## 9. GEOMETRIA ANALITYCZNA

### • Odcinek

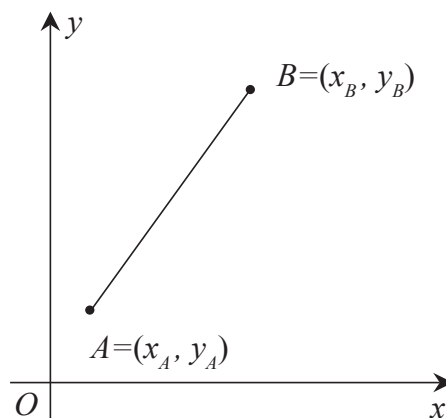
Długość odcinka o końcach w punktach

$A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$  jest dana wzorem:

$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka  $AB$ :

$$\left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$



- Wektory

Współrzędne wektora  $\overrightarrow{AB}$ :

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli  $\vec{u} = [u_1, u_2]$ ,  $\vec{v} = [v_1, v_2]$  są wektorami, zaś  $a$  jest liczbą, to

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

- Prosta

Równanie ogólne prostej:

$$Ax + By + C = 0,$$

gdzie  $A^2 + B^2 \neq 0$  (tj. współczynniki  $A, B$  nie są równocześnie równe 0).

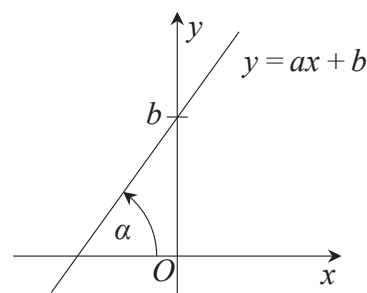
Jeżeli  $A = 0$ , to prosta jest równoległa do osi  $Ox$ ; jeżeli  $B = 0$ , to prosta jest równoległa do osi  $Oy$ ; jeżeli  $C = 0$ , to prosta przechodzi przez początek układu współrzędnych.

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi  $Oy$ , to ma ona równanie kierunkowe:

$$y = ax + b$$

Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej:

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$



Współczynnik  $b$  wyznacza na osi  $Oy$  punkt, w którym dana prosta ją przecina.

Równanie kierunkowe prostej o współczynniku kierunkowym  $a$ , która przechodzi przez punkt  $P = (x_0, y_0)$ :

$$y = a(x - x_0) + y_0$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ :

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$

- Prosta i punkt

Odległość punktu  $P = (x_0, y_0)$  od prostej o równaniu  $Ax + By + C = 0$  jest dana wzorem:

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Para prostych

Dwie proste o równaniach kierunkowych:

$$y = a_1x + b_1 \qquad y = a_2x + b_2$$

spełniają jeden z następujących warunków:

- są równoległe, gdy  $a_1 = a_2$
- są prostopadłe, gdy  $a_1a_2 = -1$
- tworzą kąt ostry  $\varphi$  i  $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{a_1 - a_2}{1 + a_1a_2} \right|$

Dwie proste o równaniach ogólnych:

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

- są równoległe, gdy  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$
- są prostopadłe, gdy  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$
- tworzą kąt ostry  $\varphi$  i  $\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$

- Trójkąt

Pole trójkąta  $ABC$  o wierzchołkach  $A = (x_A, y_A)$ ,  $B = (x_B, y_B)$ ,  $C = (x_C, y_C)$ , jest dane wzorem:

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

Środek ciężkości trójkąta  $ABC$ , czyli punkt przecięcia jego środkowych, ma współrzędne:

$$\left( \frac{x_A + x_B + x_C}{3}, \frac{y_A + y_B + y_C}{3} \right)$$

- Przekształcenia geometryczne

- przesunięcie o wektor  $\vec{u} = [a, b]$  przekształca punkt  $A = (x, y)$  na punkt  $A' = (x + a, y + b)$
- symetria względem osi  $Ox$  przekształca punkt  $A = (x, y)$  na punkt  $A' = (x, -y)$
- symetria względem osi  $Oy$  przekształca punkt  $A = (x, y)$  na punkt  $A' = (-x, y)$
- symetria względem punktu  $(a, b)$  przekształca punkt  $A = (x, y)$  na punkt  $A' = (2a - x, 2b - y)$
- jednokładność o środku w punkcie  $O$  i skali  $s \neq 0$  przekształca punkt  $A$  na punkt  $A'$  taki, że  $\overrightarrow{OA'} = s \cdot \overrightarrow{OA}$ , a więc, jeśli  $O = (x_0, y_0)$ , to jednokładność ta przekształca punkt  $A = (x, y)$  na punkt  $A' = (sx + (1-s)x_0, sy + (1-s)y_0)$

- Równanie okręgu

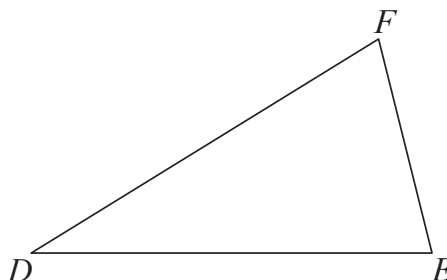
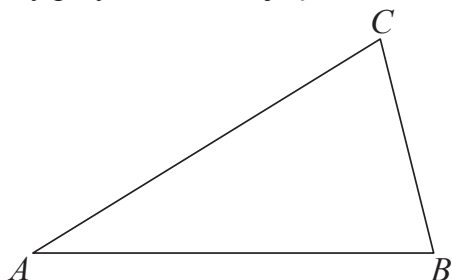
Równanie okręgu o środku w punkcie  $S = (a, b)$  i promieniu  $r > 0$ :

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

lub  $x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0$  gdy  $r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$

## 10. PLANIMETRIA

- Cechy przystawiania trójkątów

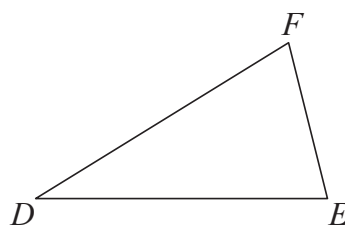
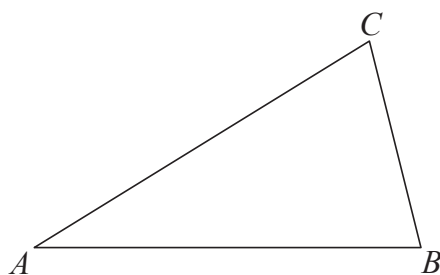




To, że dwa trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  są przystające ( $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ ), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech przystawiania trójkątów**:

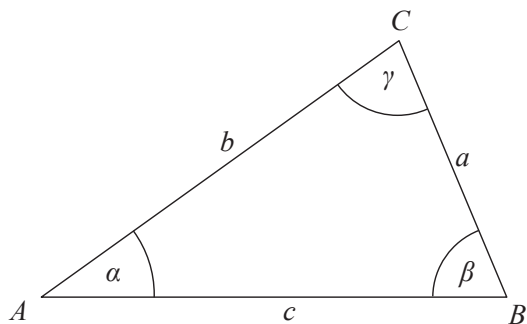
- cecha przystawiania „bok – bok – bok”:  
odpowiadające sobie boki obu trójkątów mają te same długości:  $|AB| = |DE|$ ,  $|AC| = |DF|$ ,  $|BC| = |EF|$
- cecha przystawiania „bok – kąt – bok”:  
dwa boki jednego trójkąta są równe odpowiadającym im bokom drugiego trójkąta oraz kąt zawarty między tymi bokami jednego trójkąta ma taką samą miarę jak odpowiadający mu kąt drugiego trójkąta, np.  $|AB| = |DE|$ ,  $|AC| = |DF|$ ,  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha przystawiania „kąt – bok – kąt”:  
jeden bok jednego trójkąta ma tę samą długość, co odpowiadający mu bok drugiego trójkąta oraz miary odpowiadających sobie kątów obu trójkątów, przyległych do boku, są równe, np.  $|AB| = |DE|$ ,  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ ,  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$

• Cechy podobieństwa trójkątów



To, że dwa trójkąty  $ABC$  i  $DEF$  są podobne ( $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ ), możemy stwierdzić na podstawie każdej z następujących **cech podobieństwa trójkątów**:

- cecha podobieństwa „bok – bok – bok”:  
długości boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości boków drugiego trójkąta,  
np.  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|}$
- cecha podobieństwa „bok – kąt – bok”:  
długości dwóch boków jednego trójkąta są proporcjonalne do odpowiednich długości dwóch boków drugiego trójkąta i kąty między tymi parami boków są przystające, np.  $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$ ,  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$
- cecha podobieństwa „kąt – kąt – kąt”:  
dwa kąty jednego trójkąta są przystające do odpowiednich dwóch kątów drugiego trójkąta (więc też i trzecie kąty obu trójkątów są przystające):  $|\sphericalangle BAC| = |\sphericalangle EDF|$ ,  $|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle DEF|$ ,  $|\sphericalangle ACB| = |\sphericalangle DFE|$



Przyjmujemy oznaczenia w trójkącie ABC:

|                         |   |
|-------------------------|---|
| $a, b, c$               | – długości boków, leżących odpowiednio naprzeciwko wierzchołków $A, B, C$ |
| $2p = a + b + c$        | – obwód trójkąta  |
| $\alpha, \beta, \gamma$ | – miary kątów przy wierzchołkach $A, B, C$                                |
| $h_a, h_b, h_c$         | – wysokości opuszczone z wierzchołków $A, B, C$                           |
| $R, r$                  | – promienie okręgów opisanego i wpisanego                                 |

• Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

• Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

• Wzory na pole trójkąta

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} a^2 \frac{\sin \beta \cdot \sin \gamma}{\sin \alpha} = \frac{1}{2} b^2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \gamma}{\sin \beta} = \frac{1}{2} c^2 \frac{\sin \alpha \cdot \sin \beta}{\sin \gamma}$$

$$P_{\triangle ABC} = \frac{abc}{4R}$$

$$P_{\triangle ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

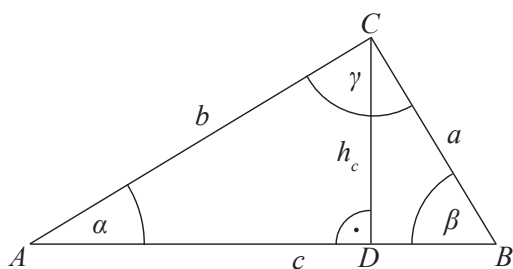
$$P_{\triangle ABC} = rp$$

$$P_{\triangle ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

• Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

W trójkącie ABC kąt  $\gamma$  jest prosty wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^2 + b^2 = c^2$ .

• Związki miarowe w trójkącie prostokątnym



Załóżmy, że kąt  $\gamma$  jest prosty. Wówczas:

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

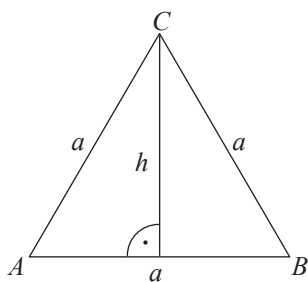
$$h_c = \frac{ab}{c}$$

$$a = c \cdot \sin \alpha = c \cdot \cos \beta$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg} \alpha = b \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} \beta}$$

$$R = \frac{1}{2} c \quad r = \frac{a+b-c}{2} = p-c$$

- Trójkąt równoboczny



$a$  – długość boku

$h$  – wysokość trójkąta

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad R = \frac{2}{3}h$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad r = \frac{1}{3}h$$

- Twierdzenie Talesa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)

Różne proste  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $P$ , przy czym spełniony jest jeden z warunków:

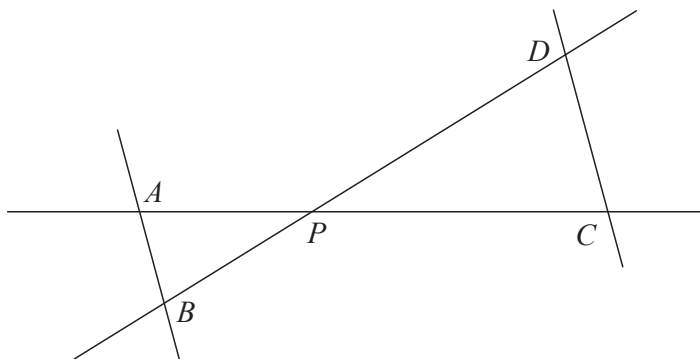
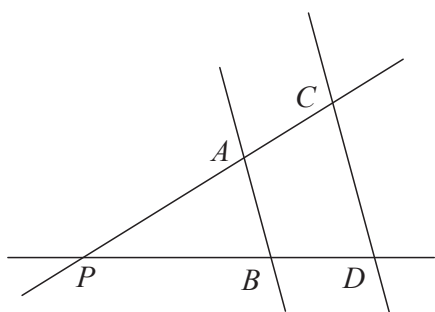
– punkt  $A$  leży wewnątrz odcinka  $PC$  oraz punkt  $B$  leży wewnątrz odcinka  $PD$

lub

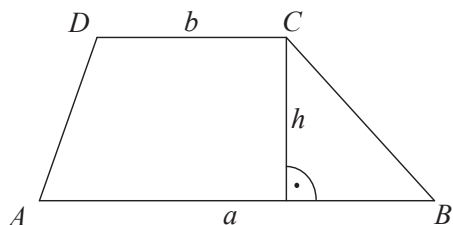
– punkt  $A$  leży na zewnątrz odcinka  $PC$  oraz punkt  $B$  leży na zewnątrz odcinka  $PD$ .

Wówczas proste  $AB$  i  $CD$  są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\frac{|PA|}{|AC|} = \frac{|PB|}{|BD|}$$



- Czworokąty



### Trapez

Czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.

Wzór na pole trapezu:

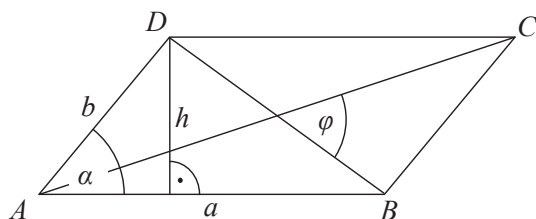
$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

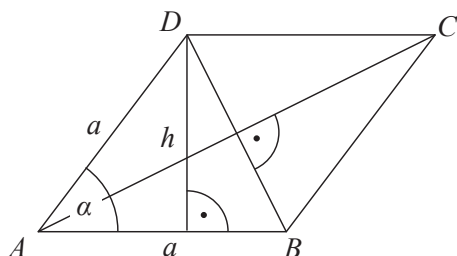
### Równoległobok

Czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.

Wzory na pole równoległoboku:

$$P = ah = a \cdot b \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin \varphi$$



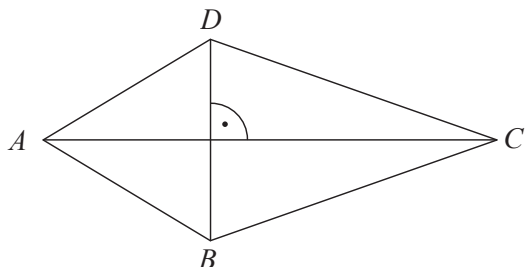


### Romb

Czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.

Wzory na pole rombu:

$$P = ah = a^2 \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



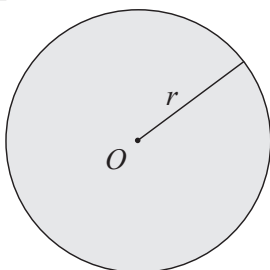
### Deltoid

Czworokąt wypukły, który ma oś symetrii zawierającą jedną z przekątnych.

Wzór na pole deltoidu:

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

### • Koło



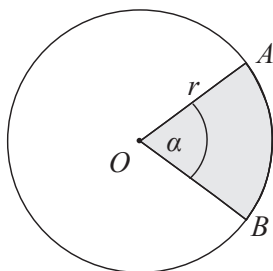
Wzór na pole koła o promieniu  $r$ :

$$P = \pi r^2$$

Obwód koła o promieniu  $r$ :

$$L = 2\pi r$$

### • Wycinek koła



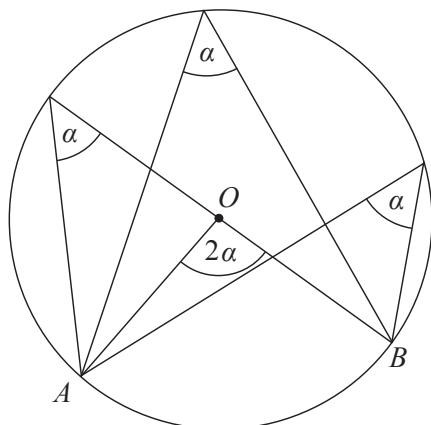
Wzór na pole wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyrażonym w stopniach:

$$P = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

Długość łuku  $AB$  wycinka koła o promieniu  $r$  i kącie środkowym  $\alpha$  wyrażonym w stopniach:

$$l = 2\pi r \cdot \frac{\alpha}{360^\circ}$$

### • Kąty w okręgu

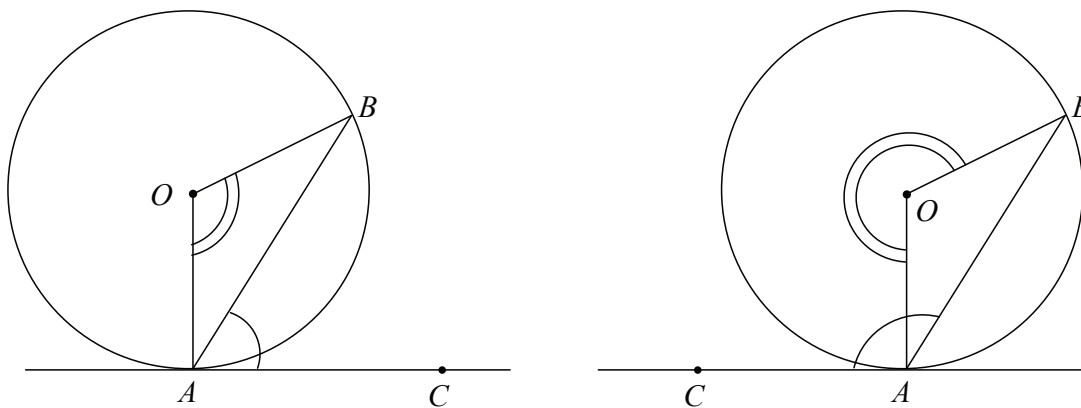


Miara kąta wpisanego w okrąg jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na tym samym łuku, są równe.

Miary kątów wpisanych w okrąg, opartych na łukach równych, są równe.

- Twierdzenie o kącie między styczną i cięciwą

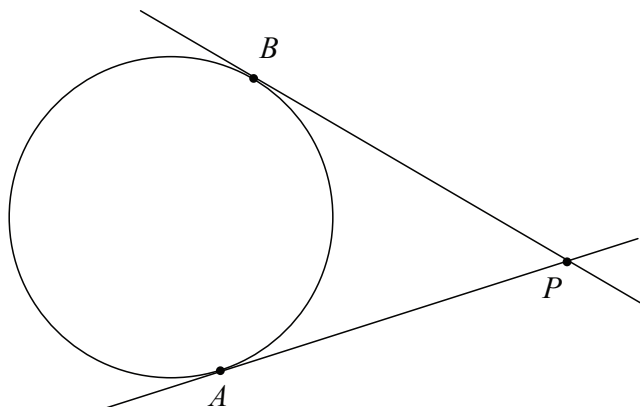


Dany jest okrąg o środku w punkcie  $O$  i jego cięciwa  $AB$ . Prosta  $AC$  jest styczna do tego okręgu w punkcie  $A$ . Wtedy  $|\sphericalangle AOB| = 2 \cdot |\sphericalangle CAB|$ , przy czym wybieramy ten z kątów środkowych  $AOB$ , który jest oparty na łuku znajdującym się wewnątrz kąta  $CAB$ .

- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach  $A$  i  $B$  przecinają się w punkcie  $P$ , to

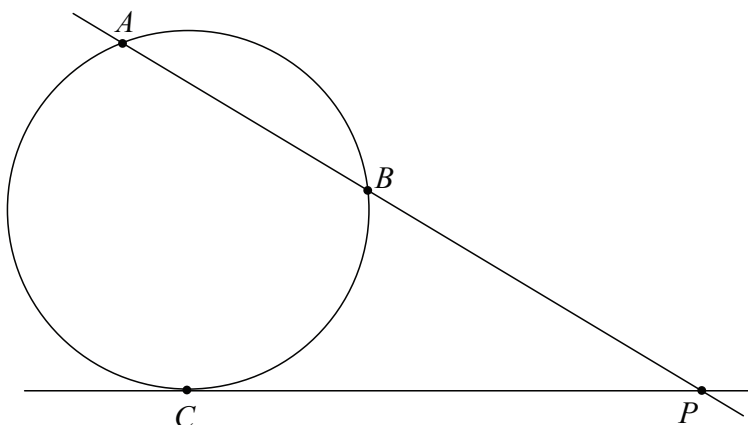
$$|PA| = |PB|$$



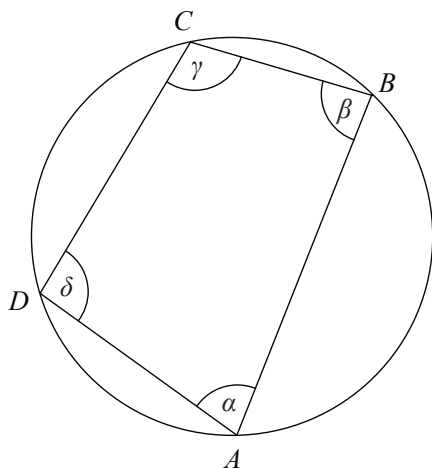
- Twierdzenie o odcinkach siecznej i stycznej

Dane są: prosta przecinająca okrąg w punktach  $A$  i  $B$  oraz prosta styczna do tego okręgu w punkcie  $C$ . Jeżeli proste te przecinają się w punkcie  $P$ , to

$$|PA| \cdot |PB| = |PC|^2$$



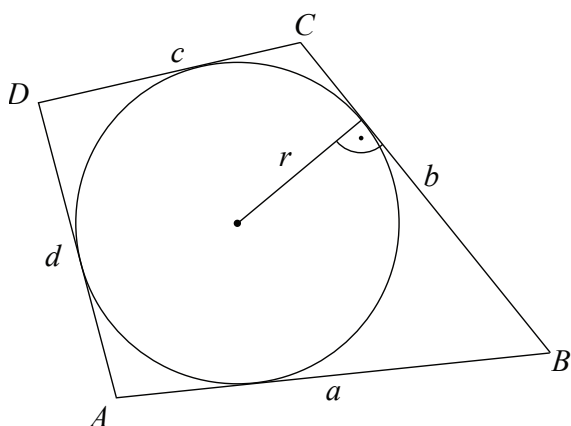
- Okrag opisany na czworokacie



Na czworokacie można opisać okrag wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwleglych katów wewnętrzných są równe  $180^\circ$ :

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$

- Okrag wpisany w czworokąt

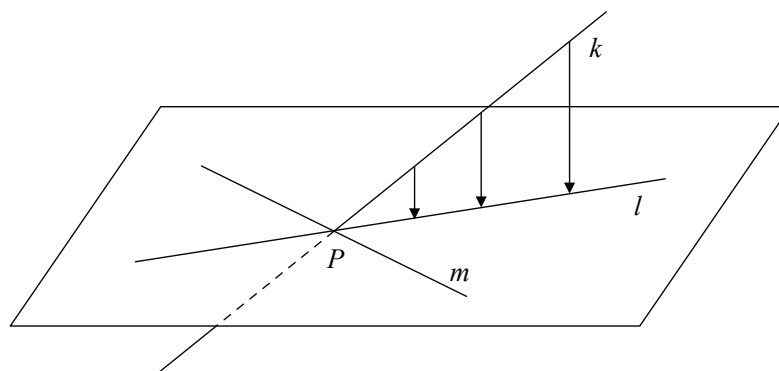


W czworokąt wypukły można wpisać okrag wtedy i tylko wtedy, gdy sumy dlugosci jego przeciwleglych boków są równe:

$$a + c = b + d$$

## 11. STEREOMETRIA

- Twierdzenie o trzech prostych prostopadlych



Prosta  $k$  przebija płaszczyznę w punkcie  $P$ . Prosta  $l$  jest rzutem prostokątnym prostej  $k$  na tę płaszczyznę. Prosta  $m$  leży na tej płaszczyźnie i przechodzi przez punkt  $P$ .

Wówczas prosta  $m$  jest prostopadła do prostej  $k$  wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej  $l$ .

Przyjmujemy oznaczenia:

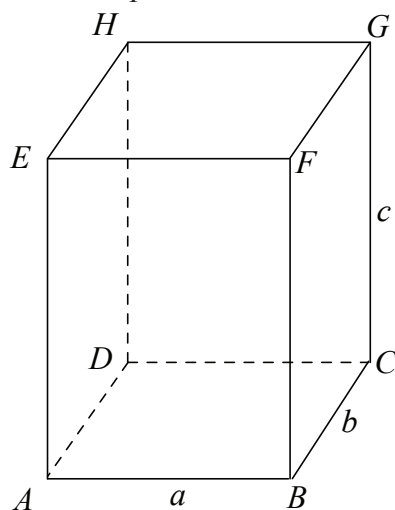
$P$  – pole powierzchni całkowitej

$P_p$  – pole podstawy

$P_b$  – pole powierzchni bocznej

$V$  – objętość

- Prostopadłościan

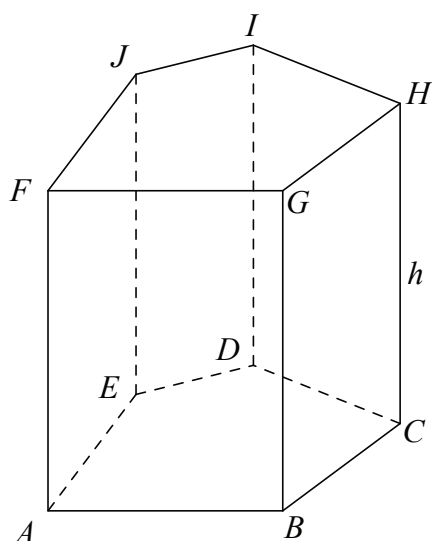


$$P = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = abc$$

gdzie  $a, b, c$  są długościami krawędzi prostopadłościanu

- Graniastosłup prosty

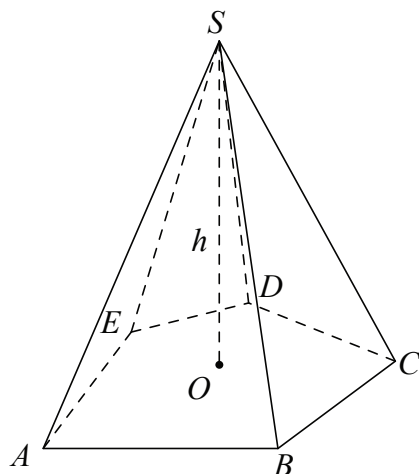


$$P_b = 2p \cdot h$$

$$V = P_p \cdot h$$

gdzie  $2p$  jest obwodem podstawy graniastosłupa

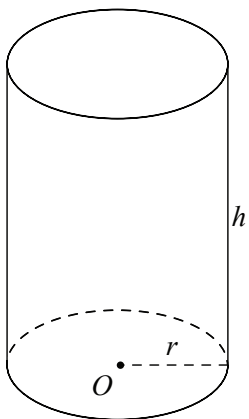
- Ostrosłup



$$V = \frac{1}{3} P_p \cdot h$$

gdzie  $h$  jest wysokością ostrosłupa

- Walec



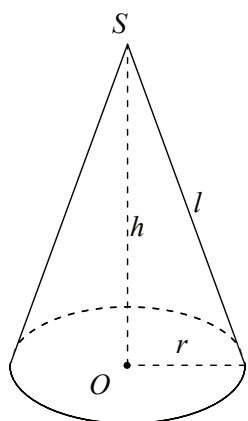
$$P_b = 2\pi rh$$

$$P = 2\pi r(r + h)$$

$$V = \pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy,  $h$  – wysokością walca

- Stożek



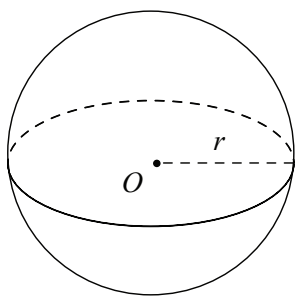
$$P_b = \pi rl$$

$$P = \pi r(r + l)$$

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

gdzie  $r$  jest promieniem podstawy,  $h$  – wysokością,  $l$  – długością tworzącej stożka

- Kula



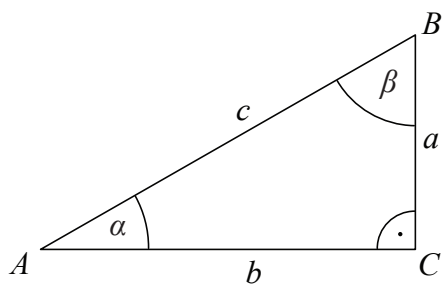
$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

gdzie  $r$  jest promieniem kuli

## 12. TRYGNOMETRIA

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym



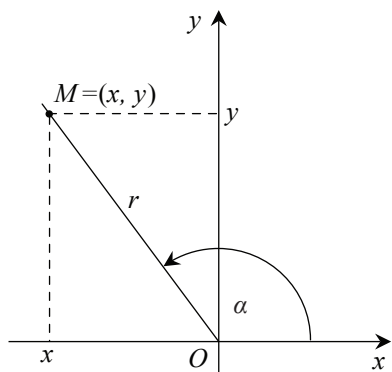
$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



- Definicje funkcji trygonometrycznych



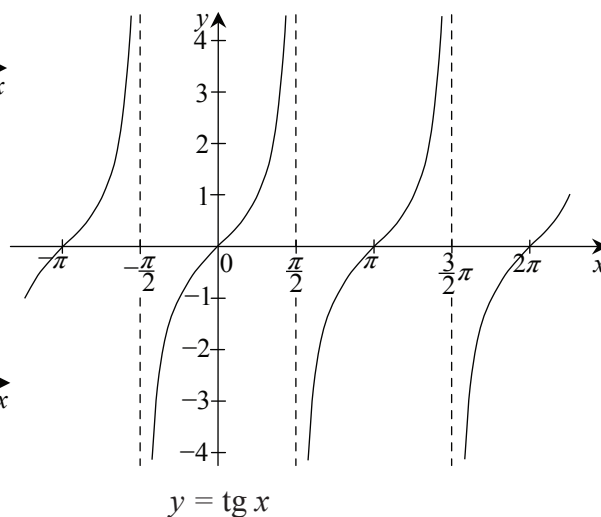
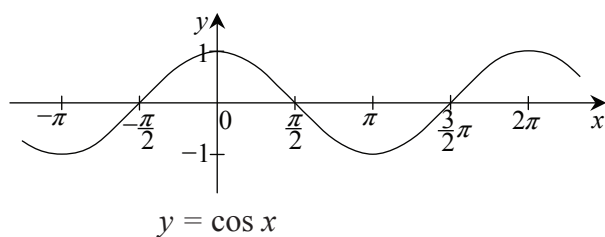
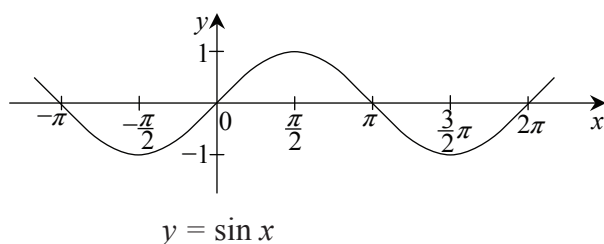
$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}, \text{ gdy } x \neq 0$$

gdzie  $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$  jest promieniem wodzącym punktu  $M$

- Wykresy funkcji trygonometrycznych



- Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k - \text{całkowite}$$

- Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

| $\alpha$                   | $0^\circ$ | $30^\circ$           | $45^\circ$           | $60^\circ$           | $90^\circ$      |
|----------------------------|-----------|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|
|                            | 0         | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin \alpha$              | 0         | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               |
| $\cos \alpha$              | 1         | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               |
| $\operatorname{tg} \alpha$ | 0         | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | nie istnieje    |

- Funkcje sumy i różnicy kątów

Dla dowolnych kątów  $\alpha, \beta$  zachodzą równości:

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta & \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta & \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta\end{aligned}$$

Ponadto mamy równości:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta}$$

które zachodzą zawsze, gdy są określone i mianownik prawej strony nie jest zerem.

- Funkcje podwojonego kąta

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \cos 2\alpha &= \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha \\ \operatorname{tg} 2\alpha &= \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}\end{aligned}$$

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\begin{aligned}\sin \alpha + \sin \beta &= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \sin \alpha \sin \beta &= -\frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)) \\ \sin \alpha - \sin \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} & \cos \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha + \cos \beta &= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} & \sin \alpha \cos \beta &= \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)) \\ \cos \alpha - \cos \beta &= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}\end{aligned}$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$$\begin{aligned}\sin(90^\circ - \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ - \alpha) &= \sin \alpha \\ \sin(90^\circ + \alpha) &= \cos \alpha & \cos(90^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha \\ \sin(180^\circ - \alpha) &= \sin \alpha & \cos(180^\circ - \alpha) &= -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) &= -\operatorname{tg} \alpha \\ \sin(180^\circ + \alpha) &= -\sin \alpha & \cos(180^\circ + \alpha) &= -\cos \alpha & \operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) &= \operatorname{tg} \alpha\end{aligned}$$

- Okresowość funkcji trygonometrycznych

$$\sin(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \sin \alpha \quad \cos(\alpha + k \cdot 360^\circ) = \cos \alpha \quad \operatorname{tg}(\alpha + k \cdot 180^\circ) = \operatorname{tg} \alpha, \quad k - \text{całkowite}$$

### 13. KOMBINATORYKA

- Wariacje z powtórzeniami

Liczba sposobów, na które z  $n$  różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  niekoniecznie różnych wyrazów, jest równa  $n^k$ .

- Wariacje bez powtórzeń

Liczba sposobów, na które z  $n$  różnych elementów można utworzyć ciąg, składający się z  $k$  ( $1 \leq k \leq n$ ) różnych wyrazów, jest równa

$$n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

- Permutacje

Liczba sposobów, na które  $n$  ( $n \geq 1$ ) różnych elementów można ustawić w ciąg, jest równa  $n!$ .

- Kombinacje

Liczba sposobów, na które spośród  $n$  różnych elementów można wybrać  $k$  ( $0 \leq k \leq n$ ) elementów, jest równa  $\binom{n}{k}$ .

## 14. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- Własności prawdopodobieństwa

$$0 \leq P(A) \leq 1 \quad \text{dla każdego zdarzenia } A \subset \Omega$$

$$P(\Omega) = 1 \quad \Omega - \text{zdarzenie pewne}$$

$$P(\emptyset) = 0 \quad \emptyset - \text{zdarzenie niemożliwe (pusty podzbiór } \Omega)$$

$$P(A) \leq P(B), \text{ gdy } A \subset B \subset \Omega$$

$$P(A') = 1 - P(A), \text{ gdzie } A' \text{ oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia } A$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

$$P(A \cup B) \leq P(A) + P(B), \text{ dla dowolnych zdarzeń } A, B \subset \Omega$$

- Twierdzenie: Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Niech  $\Omega$  będzie skończonym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych. Jeżeli wszystkie zdarzenia jednoelementowe są jednakowo prawdopodobne, to prawdopodobieństwo zdarzenia  $A \subset \Omega$  jest równe

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$$

gdzie  $|A|$  oznacza liczbę elementów zbioru  $A$ , zaś  $|\Omega|$  – liczbę elementów zbioru  $\Omega$ .

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech  $A, B$  będą zdarzeniami losowymi zawartymi w  $\Omega$ , przy czym  $P(B) > 0$ . Prawdopodobieństwem warunkowym  $P(A|B)$  nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe  $B_1, B_2, \dots, B_n$  zawarte w  $\Omega$  spełniają warunki:

1.  $B_1, B_2, \dots, B_n$  są parami rozłączne, tzn.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  dla  $i \neq j$ ,  $1 \leq i \leq n$ ,  $1 \leq j \leq n$ ,
2.  $B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n = \Omega$ ,
3.  $P(B_i) > 0$  dla  $1 \leq i \leq n$ ,

to dla każdego zdarzenia losowego  $A$  zawartego w  $\Omega$  zachodzi równość

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \dots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

## 15. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna  $n$  liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona  $n$  liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio:  $w_1, w_2, \dots, w_n$  jest równa:

$$\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$$

- Średnia geometryczna

Średnia geometryczna  $n$  nieujemnych liczb  $a_1, a_2, \dots, a_n$  jest równa:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru  $n$  danych liczbowych  $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n$  jest:

- dla  $n$  nieparzystych:  $a_{\frac{n+1}{2}}$  (środkowy wyraz ciągu)
- dla  $n$  parzystych:  $\frac{1}{2}(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1})$  (średnia arytmetyczna środkowych wyrazów ciągu)

- Wariancja i odchylenie standardowe

Wariancją  $n$  danych liczbowych  $a_1, a_2, \dots, a_n$  o średniej arytmetycznej  $\bar{a}$  jest liczba:

$$\sigma^2 = \frac{(a_1 - \bar{a})^2 + (a_2 - \bar{a})^2 + \dots + (a_n - \bar{a})^2}{n} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2}{n} - (\bar{a})^2$$

Odchylenie standardowe  $\sigma$  jest pierwiastkiem kwadratowym z wariancji.

## 16. GRANICA CIĄGU

- Granica sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu ciągów

Dane są ciągi  $(a_n)$  i  $(b_n)$ , określone dla  $n \geq 1$ .

Jeżeli  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$  oraz  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = a + b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = a - b \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Jeżeli ponadto  $b_n \neq 0$  dla  $n \geq 1$  oraz  $b \neq 0$ , to

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$$

- Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

Dany jest nieskończony ciąg geometryczny  $(a_n)$ , określony dla  $n \geq 1$ , o ilorazie  $q$ .

Niech  $(S_n)$  oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu  $(a_n)$ , to znaczy ciąg określony wzorem

$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$  dla  $n \geq 1$ . Jeżeli  $|q| < 1$ , to ciąg  $(S_n)$  ma granicę

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

Tę granicę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu  $(a_n)$ .

## 17. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji

$$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x) \text{ dla } c \in R$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$$

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[ \frac{f(x)}{g(x)} \right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}, \text{ gdy } g(x) \neq 0$$

- Pochodne niektórych funkcji

Niech  $a, b, c$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi,  $n$  dowolną liczbą całkowitą.

| funkcja                        | pochodna funkcji         |
|--------------------------------|--------------------------|
| $f(x) = c$                     | $f'(x) = 0$              |
| $f(x) = ax + b$                | $f'(x) = a$              |
| $f(x) = ax^2 + bx + c$         | $f'(x) = 2ax + b$        |
| $f(x) = \frac{a}{x}, x \neq 0$ | $f'(x) = \frac{-a}{x^2}$ |
| $f(x) = x^n$                   | $f'(x) = nx^{n-1}$       |

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja  $f$  ma pochodną w punkcie  $x_0$ , to równanie stycznej do wykresu funkcji  $f$  w punkcie  $(x_0, f(x_0))$  dane jest wzorem

$$y = ax + b,$$

gdzie współczynnik kierunkowy stycznej jest równy wartości pochodnej funkcji  $f$  w punkcie  $x_0$ , to znaczy  $a = f'(x_0)$ , natomiast  $b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$ . Równanie stycznej możemy zapisać w postaci

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

# 18. TABLICA WARTOŚCI FUNKCJI TRYGONOMETRYCZNYCH

| $\alpha [^\circ]$ | $\sin \alpha$<br>$\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\beta [^\circ]$ |
|-------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------|
| <b>0</b>          | <b>0,0000</b>                 | <b>0,0000</b>              | <b>90</b>        |
| 1                 | 0,0175                        | 0,0175                     | 89               |
| 2                 | 0,0349                        | 0,0349                     | 88               |
| 3                 | 0,0523                        | 0,0524                     | 87               |
| 4                 | 0,0698                        | 0,0699                     | 86               |
| 5                 | 0,0872                        | 0,0875                     | 85               |
| 6                 | 0,1045                        | 0,1051                     | 84               |
| 7                 | 0,1219                        | 0,1228                     | 83               |
| 8                 | 0,1392                        | 0,1405                     | 82               |
| 9                 | 0,1564                        | 0,1584                     | 81               |
| <b>10</b>         | <b>0,1736</b>                 | <b>0,1763</b>              | <b>80</b>        |
| 11                | 0,1908                        | 0,1944                     | 79               |
| 12                | 0,2079                        | 0,2126                     | 78               |
| 13                | 0,2250                        | 0,2309                     | 77               |
| 14                | 0,2419                        | 0,2493                     | 76               |
| 15                | 0,2588                        | 0,2679                     | 75               |
| 16                | 0,2756                        | 0,2867                     | 74               |
| 17                | 0,2924                        | 0,3057                     | 73               |
| 18                | 0,3090                        | 0,3249                     | 72               |
| 19                | 0,3256                        | 0,3443                     | 71               |
| <b>20</b>         | <b>0,3420</b>                 | <b>0,3640</b>              | <b>70</b>        |
| 21                | 0,3584                        | 0,3839                     | 69               |
| 22                | 0,3746                        | 0,4040                     | 68               |
| 23                | 0,3907                        | 0,4245                     | 67               |
| 24                | 0,4067                        | 0,4452                     | 66               |
| 25                | 0,4226                        | 0,4663                     | 65               |
| 26                | 0,4384                        | 0,4877                     | 64               |
| 27                | 0,4540                        | 0,5095                     | 63               |
| 28                | 0,4695                        | 0,5317                     | 62               |
| 29                | 0,4848                        | 0,5543                     | 61               |
| <b>30</b>         | <b>0,5000</b>                 | <b>0,5774</b>              | <b>60</b>        |
| 31                | 0,5150                        | 0,6009                     | 59               |
| 32                | 0,5299                        | 0,6249                     | 58               |
| 33                | 0,5446                        | 0,6494                     | 57               |
| 34                | 0,5592                        | 0,6745                     | 56               |
| 35                | 0,5736                        | 0,7002                     | 55               |
| 36                | 0,5878                        | 0,7265                     | 54               |
| 37                | 0,6018                        | 0,7536                     | 53               |
| 38                | 0,6157                        | 0,7813                     | 52               |
| 39                | 0,6293                        | 0,8098                     | 51               |
| <b>40</b>         | <b>0,6428</b>                 | <b>0,8391</b>              | <b>50</b>        |
| 41                | 0,6561                        | 0,8693                     | 49               |
| 42                | 0,6691                        | 0,9004                     | 48               |
| 43                | 0,6820                        | 0,9325                     | 47               |
| 44                | 0,6947                        | 0,9657                     | 46               |
| 45                | 0,7071                        | 1,0000                     | 45               |

| $\alpha [^\circ]$ | $\sin \alpha$<br>$\cos \beta$ | $\operatorname{tg} \alpha$ | $\beta [^\circ]$ |
|-------------------|-------------------------------|----------------------------|------------------|
| 46                | 0,7193                        | 1,0355                     | 44               |
| 47                | 0,7314                        | 1,0724                     | 43               |
| 48                | 0,7431                        | 1,1106                     | 42               |
| 49                | 0,7547                        | 1,1504                     | 41               |
| <b>50</b>         | <b>0,7660</b>                 | <b>1,1918</b>              | <b>40</b>        |
| 51                | 0,7771                        | 1,2349                     | 39               |
| 52                | 0,7880                        | 1,2799                     | 38               |
| 53                | 0,7986                        | 1,3270                     | 37               |
| 54                | 0,8090                        | 1,3764                     | 36               |
| 55                | 0,8192                        | 1,4281                     | 35               |
| 56                | 0,8290                        | 1,4826                     | 34               |
| 57                | 0,8387                        | 1,5399                     | 33               |
| 58                | 0,8480                        | 1,6003                     | 32               |
| 59                | 0,8572                        | 1,6643                     | 31               |
| <b>60</b>         | <b>0,8660</b>                 | <b>1,7321</b>              | <b>30</b>        |
| 61                | 0,8746                        | 1,8040                     | 29               |
| 62                | 0,8829                        | 1,8807                     | 28               |
| 63                | 0,8910                        | 1,9626                     | 27               |
| 64                | 0,8988                        | 2,0503                     | 26               |
| 65                | 0,9063                        | 2,1445                     | 25               |
| 66                | 0,9135                        | 2,2460                     | 24               |
| 67                | 0,9205                        | 2,3559                     | 23               |
| 68                | 0,9272                        | 2,4751                     | 22               |
| 69                | 0,9336                        | 2,6051                     | 21               |
| <b>70</b>         | <b>0,9397</b>                 | <b>2,7475</b>              | <b>20</b>        |
| 71                | 0,9455                        | 2,9042                     | 19               |
| 72                | 0,9511                        | 3,0777                     | 18               |
| 73                | 0,9563                        | 3,2709                     | 17               |
| 74                | 0,9613                        | 3,4874                     | 16               |
| 75                | 0,9659                        | 3,7321                     | 15               |
| 76                | 0,9703                        | 4,0108                     | 14               |
| 77                | 0,9744                        | 4,3315                     | 13               |
| 78                | 0,9781                        | 4,7046                     | 12               |
| 79                | 0,9816                        | 5,1446                     | 11               |
| <b>80</b>         | <b>0,9848</b>                 | <b>5,6713</b>              | <b>10</b>        |
| 81                | 0,9877                        | 6,3138                     | 9                |
| 82                | 0,9903                        | 7,1154                     | 8                |
| 83                | 0,9925                        | 8,1443                     | 7                |
| 84                | 0,9945                        | 9,5144                     | 6                |
| 85                | 0,9962                        | 11,4301                    | 5                |
| 86                | 0,9976                        | 14,3007                    | 4                |
| 87                | 0,9986                        | 19,0811                    | 3                |
| 88                | 0,9994                        | 28,6363                    | 2                |
| 89                | 0,9998                        | 57,2900                    | 1                |
| <b>90</b>         | <b>1,0000</b>                 | <b>—</b>                   | <b>0</b>         |



Centralna Komisja Egzaminacyjna  
ul. Józefa Lewartowskiego 6, 00-190 Warszawa  
tel. (22) 53-66-500, fax (22) 53-66-504  
www.cke.edu.pl, e-mail: ckesekr@cke.edu.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Gdańsku  
ul. Na Stoku 49, 80-874 Gdańsk  
tel. (58) 32-05-590, fax (58) 32-05-591  
www.oke.gda.pl, e-mail: komisja@oke.gda.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łodzi  
ul. Praussa 4, 94-203 Łódź  
tel. (42) 63-49-133, fax (42) 63-49-154  
www.oke.lodz.pl, e-mail: komisja@komisja.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Jaworznie  
ul. Adama Mickiewicza 4, 43-600 Jaworzno  
tel. (32) 78-41-615, fax (32) 78-41-608  
www.oke.jaw.pl, e-mail: oke@oke.jaw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Poznaniu  
ul. Gronowa 22, 61-655 Poznań  
tel. (61) 85-40-160, fax (61) 85-21-441  
www.oke.poznan.pl, e-mail: sekretariat@oke.poznan.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Krakowie  
os. Szkolne 37, 31-978 Kraków  
tel. (12) 68-32-101, fax (12) 68-32-100  
www.oke.krakow.pl, e-mail: oke@oke.krakow.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Warszawie  
Plac Europejski 3, 00-844 Warszawa  
tel. (22) 45-70-335, fax (22) 45-70-345  
www.oke.waw.pl, e-mail: info@oke.waw.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna w Łomży  
Al. Legionów 9, 18-400 Łomża  
tel. (86) 47-37-120, fax (86) 47-36-817  
www.oke.lomza.pl, e-mail: sekretariat@oke.lomza.pl

Okręgowa Komisja Egzaminacyjna we Wrocławiu  
ul. Zielińskiego 57, 53-533 Wrocław  
tel. (71) 78-51-894, fax (71) 78-51-866  
www.oke.wroc.pl, e-mail: sekretariat@oke.wroc.pl